Геометрия треугольника.
Теорема Чевы. Теорема Штейнера-Лемуса.

ЭМ и ПРМЗ, лекция 2
к.п.н., доц. Пырков Вячеслав Евгеньевич

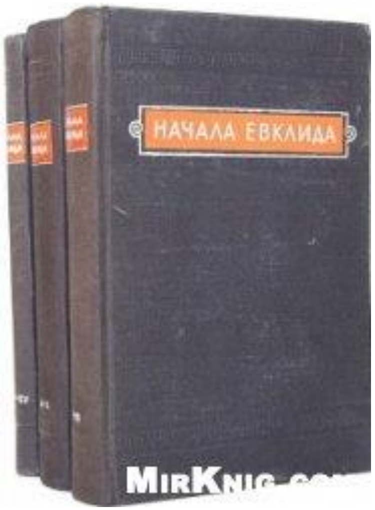
План

1. Из истории геометрии треугольника
2. Замечательные точки треугольника
3. Замечательные линии треугольника
4. Соотношения между сторонами и углами в треугольнике
5. Теорема Чевы
6. Теорема Штейнера-Лемуса

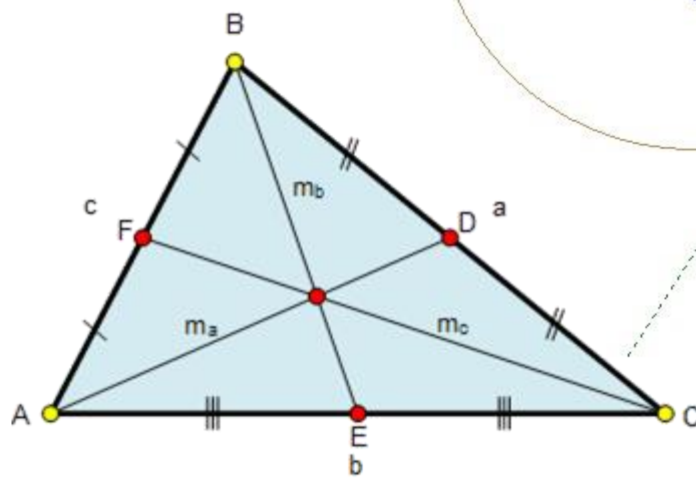
Литература для самостоятельной работы

- ***Мякишев А.Г.*** Элементы геометрии треугольника. – М.: МЦНМО, 2002.
- ***Зетель С.И.*** Новая геометрия треугольника. – М., 1962.
- ***Ефремов Д.*** Новая геометрия треугольника. – Одесса, 1903.
- ***Коксетер Г., Грейтцер С.*** Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
- ***Куланин Е.Д., Федин С.Н.*** Геометрия треугольника в задачах. – М., 2009.

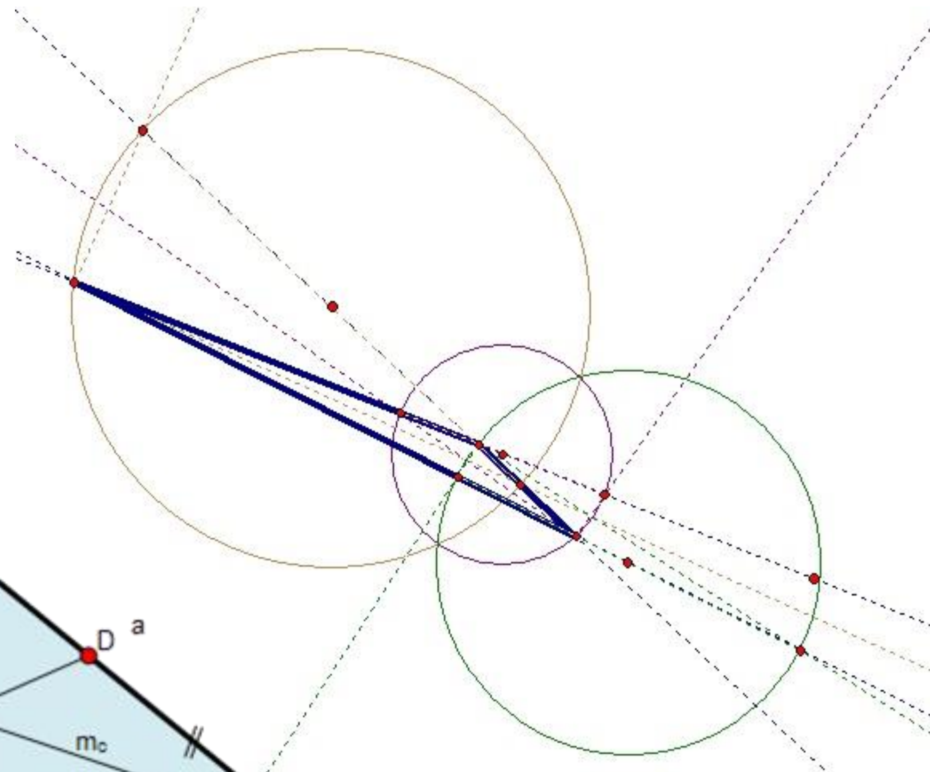
1. Из истории геометрии треугольника



Евклид Александрийский



Архимед Сиракузский



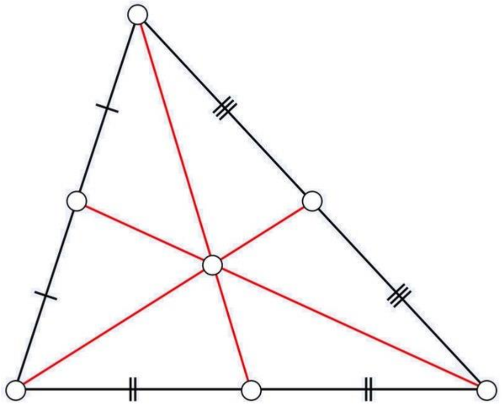
Аполлоний Пергский

2. Замечательные точки треугольника

Центроид	пересечение медиан
Ортоцентр	пересечение высот
Инцентр	пересечение биссектрис
Центр описанной окружности	пересечение серединных перпендикуляров

2. Замечательные точки треугольника

Центроид — пересечение медиан



Точкой пересечения медианы делятся на две части в отношении 2:1, считая от вершины

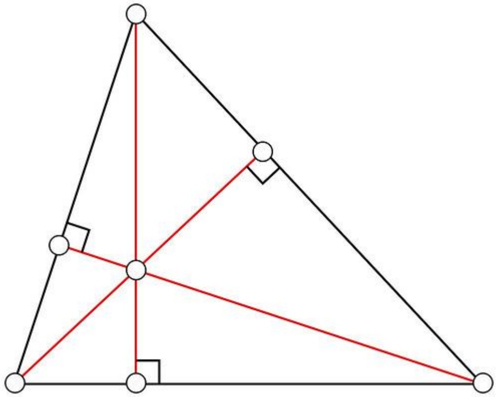
Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника

Большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана

Из векторов, образующих медианы, можно составить треугольник

2. Замечательные точки треугольника

Ортоцентр — пересечение высот



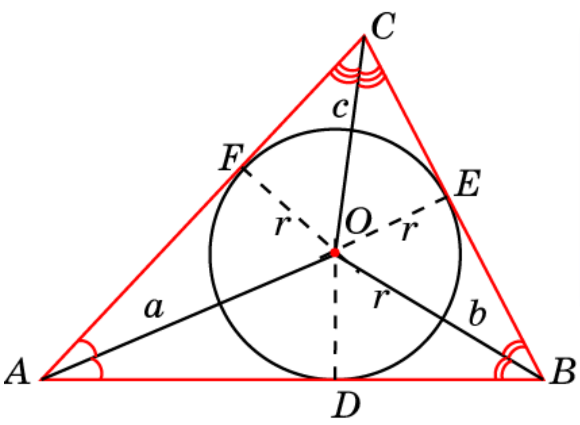
В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному

В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники

Основания высот образуют так называемый ортотреугольник, обладающий собственными свойствами

2. Замечательные точки треугольника

Инцентр — пересечение биссектрис

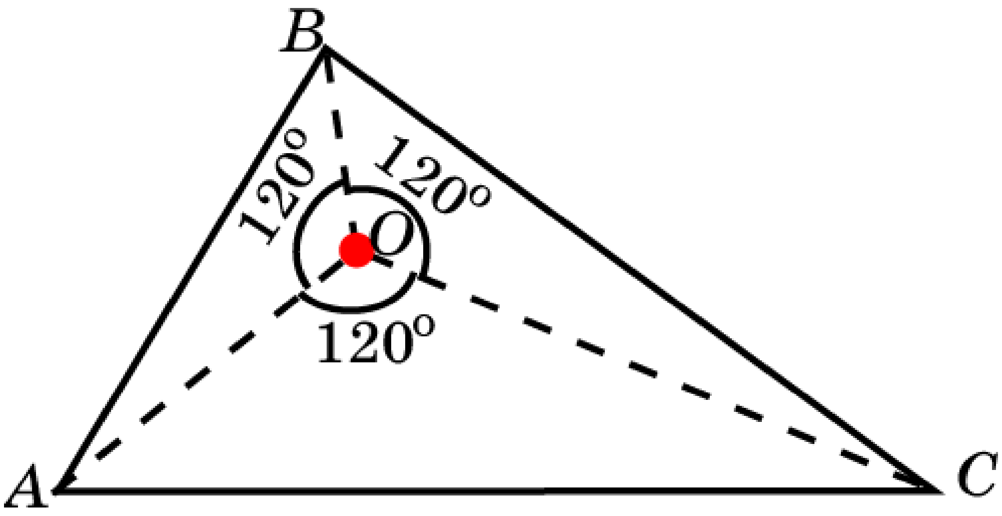


Биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка — центр одной из трёх вневписанных окружностей этого треугольника

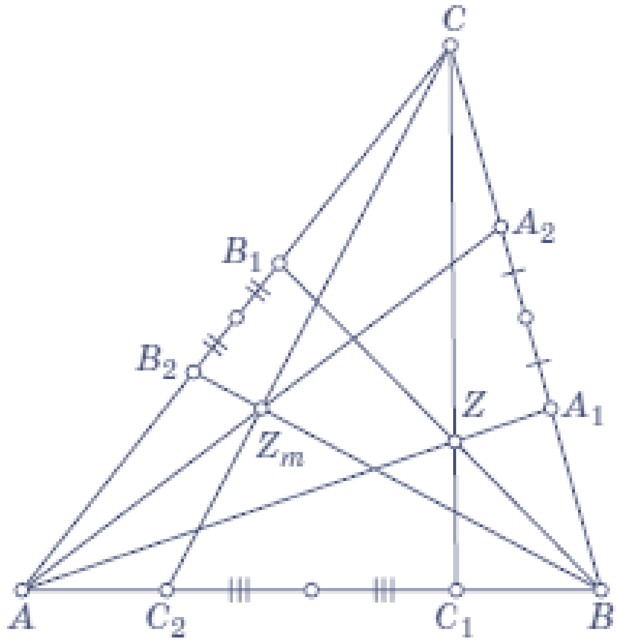
Основания биссектрис двух внутренних и одного внешнего углов треугольника лежат на одной прямой, если биссектриса внешнего угла не параллельна противоположной стороне треугольника

2. Замечательные точки треугольника

Эванджелиста Торричелли

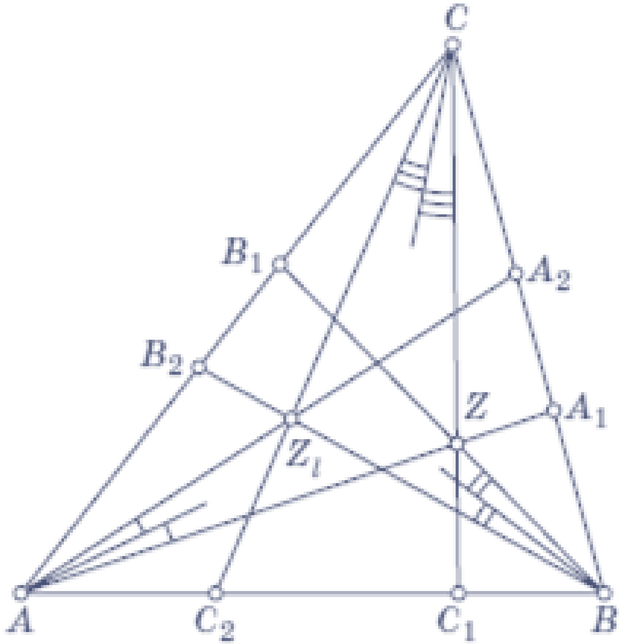


2. Замечательные точки треугольника



Изотомическое сопряжение. Зафиксируем на плоскости треугольник ABC. Выберем некоторую точку плоскости Z и проведём через неё и вершины треугольника прямые, пересекающие стороны треугольника (или их продолжения) в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Каждую такую точку отразим симметрично относительно середины той стороны, на которой она лежит*). Полученные три точки обозначим через A_2, B_2, C_2. Тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в некоторой точке Z_m. Эта точка называется *изотомически сопряжённой* точке Z относительно треугольника ABC.

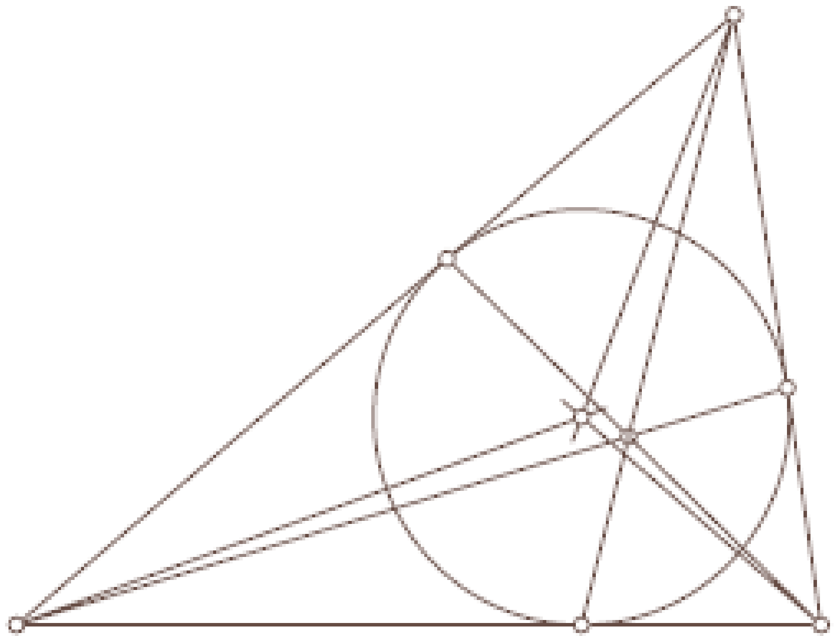
2. Замечательные точки треугольника



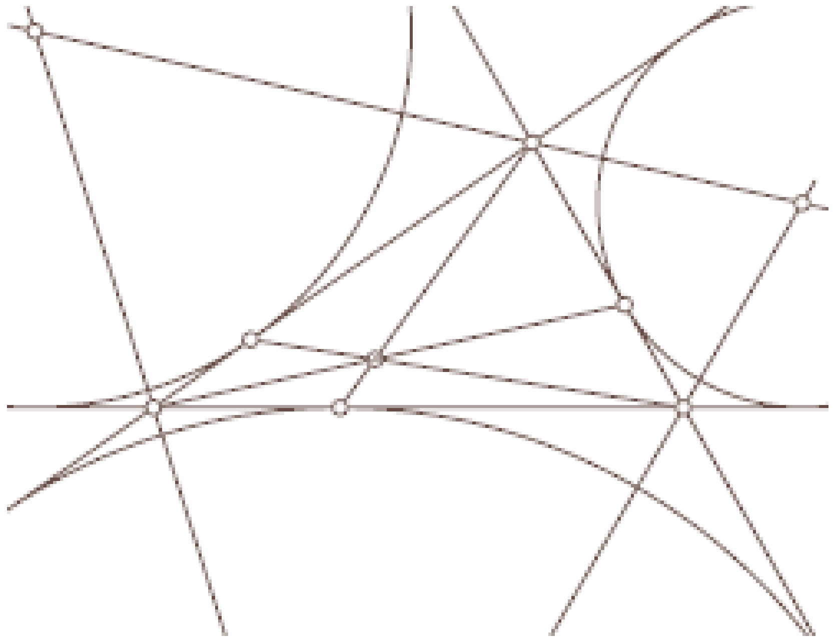
Изогональное сопряжение. Зафиксируем на плоскости треугольник ABC. Вновь выберем некоторую точку плоскости Z и проведём через неё и вершины треугольника прямые, пересекающие стороны треугольника (или их продолжения) в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2, симметричные прямым AA_1, BB_1, CC_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника, пересекаются в одной точке Z_l. Эта точка называется *изогонально сопряжённой* точке Z относительно треугольника ABC.

- Д/з: Изоциркулярное преобразование (самостоятельно)

2. Замечательные точки треугольника

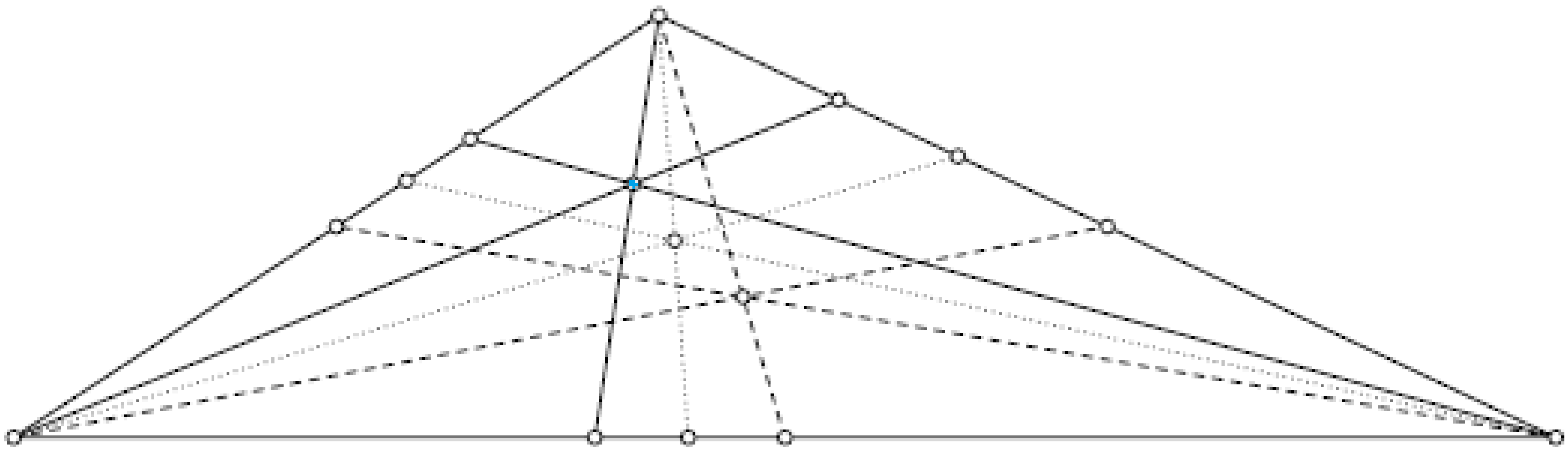


G — точка Жергонна — точка пересечения прямых, проходящих через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника и противолежащие вершины.



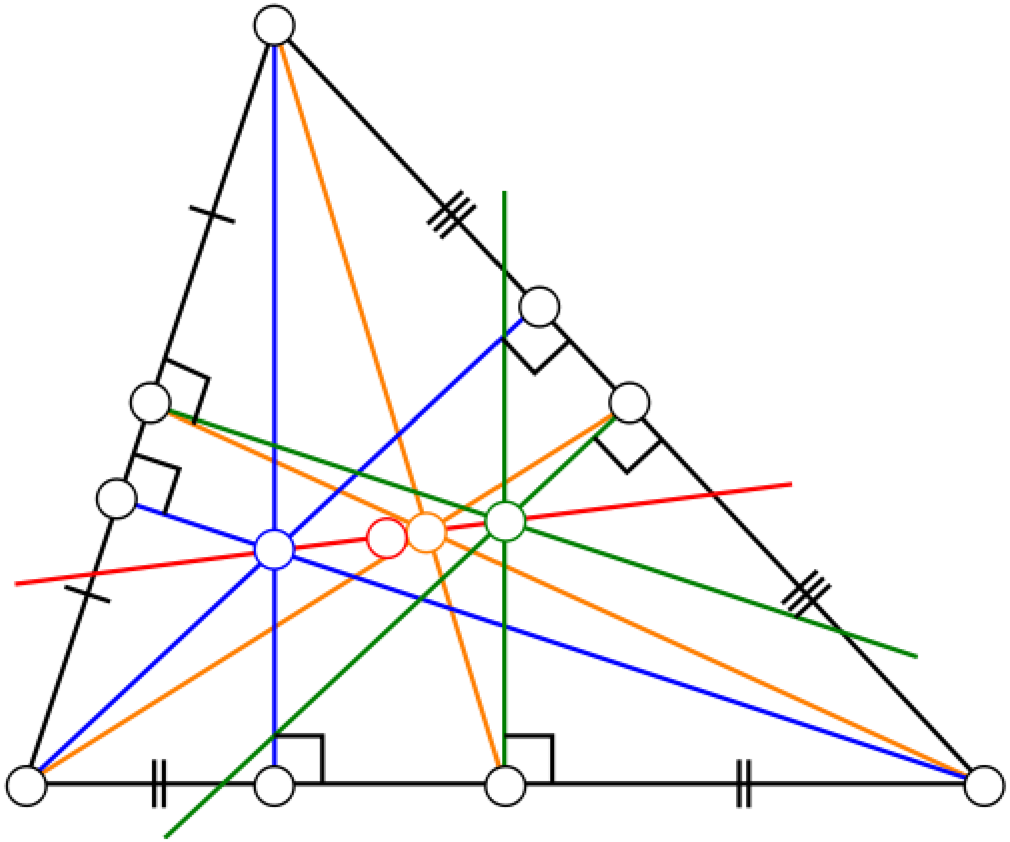
N — точка Нагеля — точка пересечения прямых, проходящих через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника и противолежащие вершины.

2. Замечательные точки треугольника



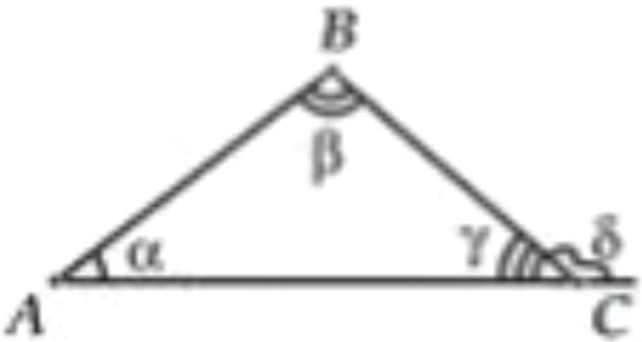
L — точка Лемуана — точка, изогонально сопряжённая точке пересечения медиан, т. е. точка, пересечения прямых, симметричных медианам относительно соответствующих биссектрис треугольника.

3. Замечательные линии треугольника



Леонард Эйлер
(1707 - 1783)

4. Соотношения между сторонами и углами треугольника



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\delta = \alpha + \beta$$

Теорема о сумме углов треугольника:
Сумма углов треугольника равна 180°.

Следствие:
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

4. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника:

1) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

2) В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

$\angle C > \angle A \Rightarrow AB > BC$

$\angle C > \angle B \Rightarrow AB > AC$

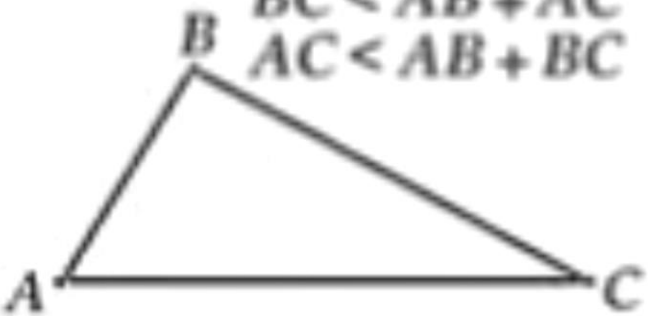
$AC > BC \Rightarrow \angle B > \angle A$

Следствие:

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.

4. Соотношения между сторонами и углами треугольника

$$AB < AC + BC$$
$$BC < AB + AC$$
$$AC < AB + BC$$



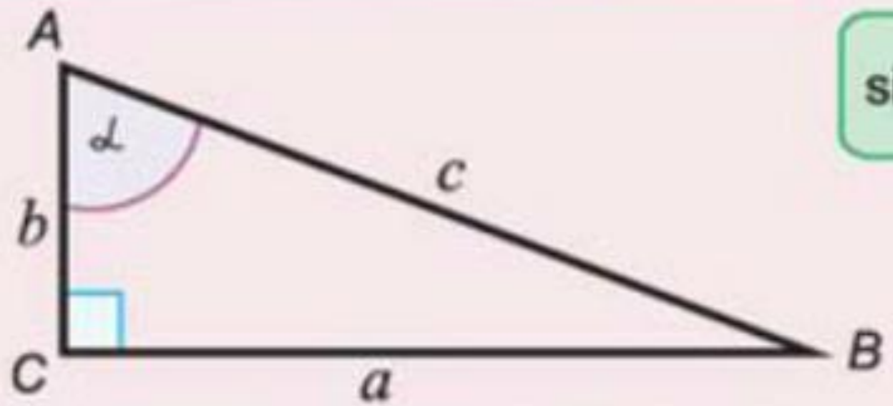
$$BC > AC - AB$$
$$AC > BC - AB$$
$$AB > AC - BC$$

Неравенство треугольника:

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше разности двух других сторон

4. Соотношения между сторонами и углами треугольника

ОПРЕДЕЛЕНИЯ



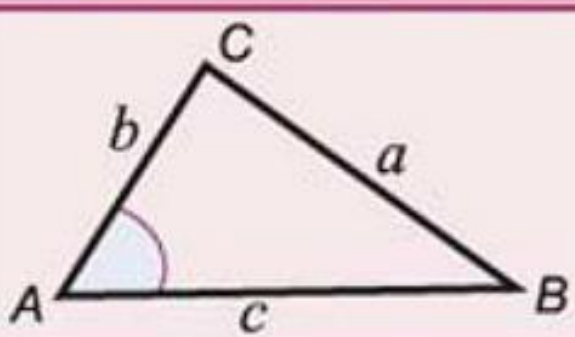
(Катет a противолежит углу α,
катет b прилежит к углу α)

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

4. Соотношения между сторонами и углами треугольника

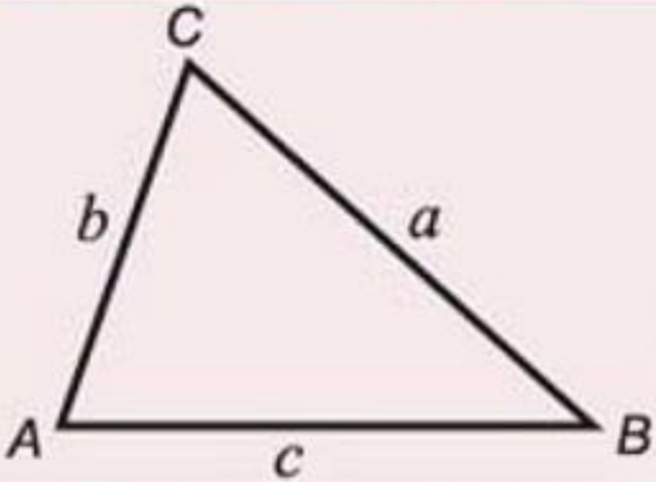


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 > b^2 + c^2$	$a^2 < b^2 + c^2$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\angle A = 90^\circ$	$\angle A > 90^\circ$	$\angle A < 90^\circ$

4. Соотношения между сторонами и углами треугольника



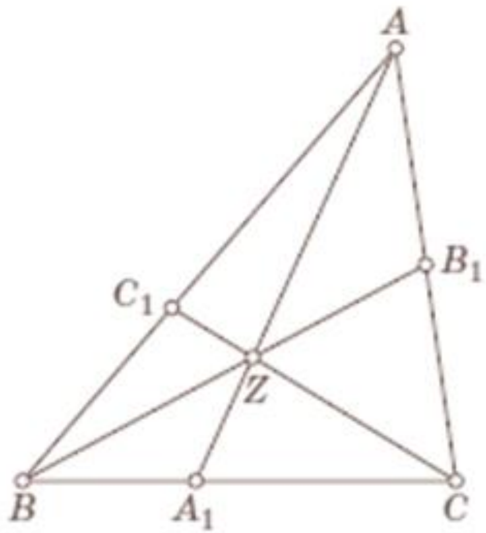
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R – радиус описанной окружности)

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ

$$a > b \Leftrightarrow \angle A > \angle B$$

5. Теорема Чевы



Выберем в произвольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 на сторонах BC, CA, AB соответственно. Следующие два утверждения равносильны:

а) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в некоторой внутренней точке Z треугольника ABC;

б) $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$ (условие Чевы).

Доказать прямую теорему Чевы (а$\Rightarrow$б) проще всего, заменив отношения отрезков в условии Чевы на отношение площадей:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \frac{S_{BZA_1}}{S_{CZA_1}},$$

следовательно,

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{S_{ABA_1} - S_{BZA_1}}{S_{ACA_1} - S_{CZA_1}} = \frac{S_{BZA}}{S_{CZA}}.$$

5. Теорема Чевы

Точно так же получим, что

$$\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{S_{CZB}}{S_{BZA}}, \qquad \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{S_{CZA}}{S_{CZB}}.$$

Теперь осталось только перемножить эти три равенства:

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{S_{BZA}}{S_{CZA}}\cdot\frac{S_{CZB}}{S_{BZA}}\cdot\frac{S_{CZA}}{S_{CZB}}=1.$$

Обратная же теорема Чевы следует из прямой: пусть AA_1 и BB_1 пересекаются в точке Z. Пусть прямая CZ пересекает сторону AB треугольника в точке C_2. Для точек A_1, B_1, C_2 выполняется условие Чевы:

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_2}{BC_2}=1.$$

Сопоставив это соотношение с заданным равенством, приходим к выводу, что $\frac{AC_2}{BC_2}=\frac{AC_1}{BC_1}$, т. е. $C_1=C_2$.

5. Теорема Чевы

Теорема Чевы в форме синусов

В каждом из рассмотренных случаев — и в случае внутренней точки Z, и в случае внешней точки Z — условие Чевы можно записать также в виде

$$\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}=1.$$

Доказательство равносильности этих условий не сложно. Действительно, применив теорему синусов к треугольникам ACC_1 и BCC_1, имеем:

$$\frac{AC_1}{CC_1}=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle CAC_1}\quad\text{и}\quad\frac{BC_1}{CC_1}=\frac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle CBC_1}.$$

Разделив одно равенство на другое, получаем:

$$\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{\sin\angle CBC_1}{\sin\angle CAC_1}\cdot\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}=\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle CAB}\cdot\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}.$$

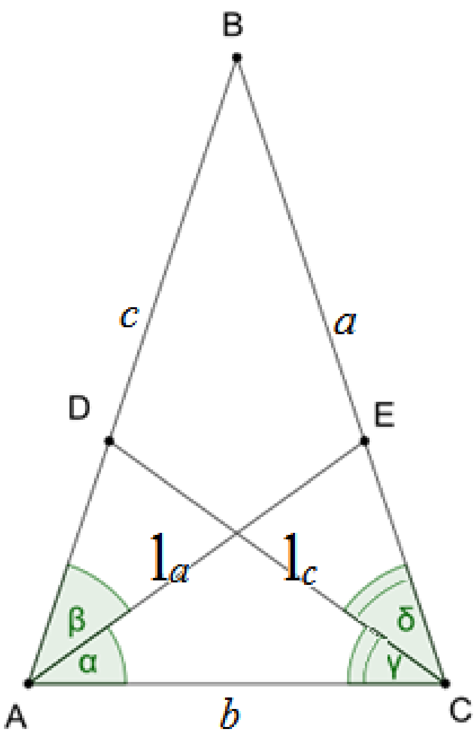
Аналогично $\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}$, $\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{a}{c}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}$. Окончательно имеем:

$$1=\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}=$$

$$=\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}\cdot\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}.$$

6. Теорема Штейнера - Лемуса

Любой треугольник, у которого равны длины биссектрис двух углов (измеряемые от вершины до противоположной стороны), является равнобедренным.



Пусть в $\Delta \boldsymbol{ABC}$ $\boldsymbol{l_a = l_c}$, но $a \neq c$. Рассмотрим

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\alpha}{b+c} \quad \text{и} \quad l_c = \frac{2ab \cdot \cos\gamma}{a+b}.$$

Пусть $a > c$, тогда $\alpha > \gamma \Rightarrow \cos\alpha < \cos\gamma$, так как эти углы – острые. Сравним:

$$\frac{bc}{b+c} - \frac{ab}{a+b} = \frac{b^2(c-a)}{(b+c)(a+b)} < 0 \quad \Rightarrow \frac{bc}{b+c} < \frac{ab}{a+b}$$

Таким образом, $\boldsymbol{l_a < l_c}$, что противоречит условию. Следовательно, $a = c$. ■